Avance y Perspectiva
Revista de divulgación del CINVESTAV

# Formulaciones hamiltonianas de la relatividad general

Karina Galache · Friday, August 26th, 2022

Categorías: Ciencias Exactas, Zona Abierta

Los campos físicos fundamentales que describen la materia y sus interacciones en el universo tienen un comportamiento cuántico en su naturaleza más básica; es decir, obedecen las leyes de la teoría cuántica de acuerdo con el paradigma actual de la física. Por diferentes razones físicas, en ocasiones ese comportamiento cuántico no se puede apreciar directamente con los instrumentos o aparatos construidos a la fecha, y por lo tanto están fuera del alcance observacional. En esos casos, lo que se observa es otro régimen o comportamiento de los campos físicos llamado clásico, en el sentido de no cuántico. El comportamiento cuántico y el clásico son dos regímenes del mismo campo físico, siendo el primero el básico o fundamental.

Develar el aspecto cuántico de los campos físicos es, pues, algo no sencillo tanto teórica como experimentalmente. Por ejemplo, en la actualidad no se entienden y no se conocen todas las propiedades cuánticas del campo gravitacional. Hay resultados teóricos parciales, entre los cuales se encuentran los espectros—que muestran un aspecto discreto—de operadores geométricos que corresponden al área, volumen y longitud, así como otras predicciones teóricas de la teoría líder de la gravedad cuántica, pero no se conoce con certeza la naturaleza cuántica de la gravitación. En particular, no se sabe si esas construcciones teóricas son compatibles con la realidad o no por falta de experimentos. Conocer el aspecto cuántico de la gravitación es uno de los retos de la física teórica actual [1].

Existen varios caminos, diferentes enfoques conceptuales o teóricos, para acercarse al comportamiento cuántico de la materia y sus interacciones; cada uno tiene ciertas ventajas. Un camino es la llamada cuantización canónica, la cual es esencialmente una síntesis de la ideas de Hamilton y Dirac, que consiste en escribir primero las ecuaciones de movimiento clásicas de un campo físico fundamental en forma hamiltoniana, y después dar una serie de reglas o técnicas para obtener el aspecto cuántico del campo físico. Dar estas últimas reglas se le llama cuantizar el sistema. Son reglas muy genéricas, que muchas veces no están dadas, estrictamente hablando, sino que, en cierto sentido, tienen que ser descubiertas, de acuerdo con la naturaleza del campo físico en estudio. Se trata de lineamientos generales, más que de reglas concretas [1].

De acuerdo con lo explicado, es claro que en el contexto de la cuantización canónica, las formulaciones hamiltonianas de sistemas físicos son relevantes. Por otra parte, ellas son también descripciones alternativas a la llamada formulación lagrangiana de los mismos, la cual es, en principio, más común o usual. Dada una formulación lagrangiana, se puede obtener a partir de ella una formulación hamiltoniana, y una vez que se tiene una formulación hamiltoniana se pueden encontrar muchas más mediante ciertas transformaciones conocidas como transformaciones canónicas. Por otra parte, las formulaciones lagrangianas de sistemas físicos tampoco son únicas, en el sentido de que un sistema físico puede describirse con diferentes conjuntos de variables o, más interesante aún, de manera distinta—-con lagrangianas genuinamente diferentes entre sí—pero empleando el mismo conjunto de variables. Cabe hacer notar que las formulaciones hamiltonianas obtenidas de un principio de acción lagrangiano no necesariamente se relacionan mediante transformaciones canónicas con las formulaciones hamiltonianas obtenidas de otro principio de acción lagrangiano, incluso cuando ambas lagrangianas usen el mismo conjunto de variables y proporcionen las mismas ecuaciones de movimiento. Tal es el caso, por ejemplo, de la relatividad general con constante cosmológica en un espaciotiempo de dimensión 3, cuyas ecuaciones de movimiento pueden ser obtenidas a partir del principio de acción de Palatini o del principio de acción de Witten (acción exótica). Las formulaciones hamiltonianas obtenidas de ambos principios son intrínsecamente diferentes entre sí.

Bornholm 1959
From the left, Richard Arnowitt, Charles Misner and Stanley Deser

La primera formulación hamiltoniana de la teoría general de la relatividad del movimiento de Einstein, también llamada simplemente relatividad general, fue dada por Arnowitt, Deser y Misner (ADM) a principios de la década de los 60 del siglo XX [2]. Ésta se obtuvo a partir del principio de acción de Einstein-Hilbert, el cual es un funcional de la métrica del espaciotiempo y proporciona las ecuaciones de campo de Einstein precisamente al variar funcionalmente la acción respecto a la métrica. Sin embargo, la formulación hamiltoniana de ADM no es la más simple ni tampoco la más fácil de obtener. Hay más de 40 años entre la formulación lagrangiana de Einstein-Hilbert y la formulación hamiltoniana de ADM de la relatividad general. ¿Por qué tantos años de diferencia entre una y otra? La razón es que la teoría de la gravitación de

Einstein es una teoría geométrica, y las variables de espacio fase de la formulación hamiltoniana tienen que estar adaptadas al aspecto geométrico de la teoría, las cuales no fueron fáciles de hallar hasta que Arnowitt, Deser y Misner dieron una parametrización apropiada de la métrica del espaciotiempo que permitió develar tales variables.

En la actualidad existen otras formulaciones hamiltonianas de la relatividad general que son conceptual y técnicamente más simples que la formulación de ADM. Así, si se desea dar la primera mirada a las descripciones hamiltonianas de la relatividad general conviene enfocarse primero en las formulaciones más fáciles de obtener, las más directas, pues su relativa sencillez involucra aspectos conceptuales enriquecedores de la teoría. Ese es el camino que, en mi opinión, debe seguirse en los cursos sobre relatividad general en las licenciaturas y en los posgrados, en vez de seguir la ruta histórica. Sin embargo, hay un desconocimiento generalizado de tales formulaciones, desafortunadamente.

En años recientes, obtuvimos una formulación hamiltoniana de la relatividad general que, aunque involucra las sutilezas propias de la teoría, se deduce fácil y directamente a partir de la acción de Palatini para dimensión arbitraria del espaciotiempo, no necesariamente de dimensión 4 [3]. También se consiguió, con la misma técnica, una formulación hamiltoniana para la relatividad general en dimensión 4 a partir de la acción de Holst [4]. Tanto la acción de Palatini en n dimensiones como la de Holst incorporan de manera explícita la simetría local de Lorentz, la cual es una de las simetrías fundamentales de la naturaleza. Ambas acciones dependen funcionalmente de dos objetos matemáticos: el primero es la base dual a la base ortonormal del espacio tangente en cada punto del espaciotiempo y el segundo es una conexión de Lorentz. Las bases ortonormales representan observadores locales para quienes la métrica del espacio tiempo tiene una forma muy sencilla, conocida como la métrica de Minkowski. La conexión de Lorentz, por otra parte, interviene en las acciones de Palatini y Holst a través de su curvatura, en forma análoga a la teoría de Maxwell del campo electromagnético, el potencial de norma da origen al tensor de Faraday o Maxwell.

En particular, para espaciotiempo de dimensión 4, indistintamente de si se usa la acción de Palatini o la de Holst, nuestra técnica se basa en realizar una parametrización apropiada de la base dual a la base ortonormal del espacio tangente, la cual permite identificar inmediatamente la variable de configuración del campo gravitacional así como su momento canónicamente conjugado. Una vez hechas estas identificaciones, el principio de acción se parametriza en términos de estas variables más otros campos que juegan el papel de multiplicadores de lagrange y de otros más que son campos auxiliares; estos últimos pueden ser eliminados de la acción resolviendo su propia ecuación de movimiento al variar la acción respecto de ellos y sustituyendo el resultado en la acción. Una vez eliminados los campos auxiliares, se obtiene la formulación hamiltoniana inmediatamente. Se puede decir que nuestra parametrización de los campos para la relatividad general de primer orden es análoga a la parametrización de Arnowitt, Deser y Misner para el formalismo hamiltoniano basado en la métrica, en el sentido de que nuestra parametrización de los campos lleva de inmediato a la formulación hamiltoniana al igual que sucede en la formulación ADM, aunque en su caso no se involucran campos auxiliares.

Nuestro enfoque contrasta con el análisis hamiltoniano usual, que se basa en el método de Dirac [5], en el cual la idea es considerar a todas las variables de las que depende funcionalmente la acción como variables de configuración y definir sus momentos canónicamente conjugados a ellas. Esto implica la introducción de constricciones sobre las variables de espacio fase que a su vez necesitan clasificarse en constricciones de primera clase o segunda clase en la terminología de Dirac. Una de las desventajas del método de Dirac es que el espacio fase se incrementa, con el respectivo aumento de constricciones, para no alterar los grados de libertad físicos del sistema bajo estudio. En nuestro enfoque, por el contrario, las variables de espacio fase no se incrementan, sino que se reducen por la forma en que se parametrizan los campos de los cuales depende funcionalmente la acción para la relatividad general de primer orden.

Un segundo aspecto relevante de la técnica empleada es que la formulación hamiltoniana obtenida involucra únicamente constricciones de primera clase, a diferencia de los enfoques usuales previos que involucran además constricciones de segunda clase, las cuales deben manejarse ya sea con el paréntesis de Dirac o resolverse en forma explícita [6]. Una tercera característica de nuestro enfoque es que el análisis hamiltoniano es manifiestamente covariante de Lorentz, lo cual es un aspecto distinguido de nuestra formulación puesto que la simetría local de Lorentz es una de las simetrías fundamentales de la naturaleza, que conviene mantener intacta en el análisis hamiltoniano. Un cuarto aspecto a resaltar es que la técnica funciona también en el caso de materia fermiónica acoplada a la relatividad general descrita por la acción de Holst [7] y, por la forma en que se realizan los acoplamientos de los campos de materia al campo gravitacional, es claro que la técnica también funciona con los restantes acoplamientos de materia a la relatividad general.

Vale la pena mencionar también que las variables de espacio fase manifiestamente covariantes de Lorentz del análisis hamiltoniano de la acción de Holst [4] llevan de inmediato a las llamadas variables de Ashtekar-Barbero cuando se impone la condición de norma conocida como “norma temporal”, la cual elimina la posibilidad de realizar localmente transformaciones de Lorentz conocidas como “Boosts” lo que hace que la simetría de Lorentz se reemplace por la simetría residual del grupo de rotaciones espaciales. Es importante hacer notar que las variables de Ashtekar-Barbero son las variables canónicas empleadas en la actualidad como punto de partida en el programa de cuantización canónica de la relatividad general [7].

Finalmente, conviene señalar que la utilidad o no de nuestras formulaciones hamiltonianas manifiestamente covariantes de Lorentz para la construcción de una teoría cuántica de la gravedad, alternativa a la teoría líder actual [7], es un problema abierto, dado lo reciente de las mismas.

## Referencias

[1] Rovelli, C. (2004). Quantum Gravity. Cambridge University Press, Cambridge.
[2] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C.W. (1962). The Dynamics of General Relativity in Gravitation: An Introduction to Current Research. Edited by Witten, L., Wiley, New York.
[3] Montesinos, M., Escobedo, R., Romero, J., and Celada, M. (2020). Canonical analysis of n-dimensional Palatini action without second-class constraints. Physical Review D 101, 024042. DOI:

10.1103/PhysRevD.101.024042
[4] Montesinos, M., Romero, J., and Celada, M. (2020). Canonical analysis of Holst action without second-class constraints. Physical Review D 101, 084003. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.084003

5] Dirac, P. A. M. (1964). Lectures on Quantum Mechanics. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York.

[6] Montesinos, M., Romero, J., and Celada, M. (2018). Manifestly Lorentz-covariant variables for the phase space of general relativity, Physical Review D 97, 024014. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.024014
[7] Romero, J., Montesinos, M., and Celada, M. (2021). Hamiltonian analysis of fermions coupled to the Holst action. Physical Review D 103, 124030. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.124030